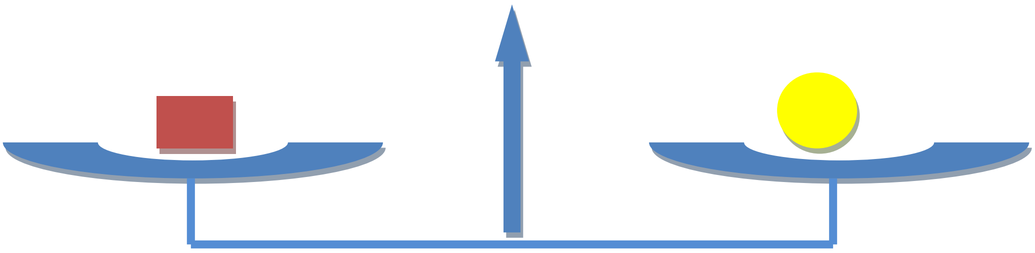
Les Égalités

Les exercices d'application situés dans le cours ont leurs corrigés en fin de dossier

1 - Définition d'une égalité

On a coutume de considérer l'égalité comme la représentation d'une balance en situation « équilibrée » (d'où le symbole de la balance pour la justice):

L'égalité est le lien entre deux entités qui « valent » la même chose :



De la même manière, l'égalité mathématique est le lien entre deux écritures mathématiques équivalentes :

$$7 + 3 = 10$$

où chaque partie de l'égalité est appelé **membre** de l'égalité. Ainsi **7 + 3** est le premier membre et **10** est le second membre

Nous pourrions écrire d'autres égalités mathématiques comme :

$$16 = 8 \times 2$$

ou encore

$$11 = 15 - 4$$

ou encore

$$20 : 5 = 4$$

2 – Notion d'égalité vraie ou fausse

	7 + 3 = 10	**est vraie**
	7 + 3 = 14	**est fausse**
Et on écrira alors	**7 + 3 ≠ 14**	

Ainsi peut-on écrire :

16 = 2 x 8
15 ≠ 3 + 7
10 ≠ 14 - 6
11 = 33 : 3

Exercices d'application - 1

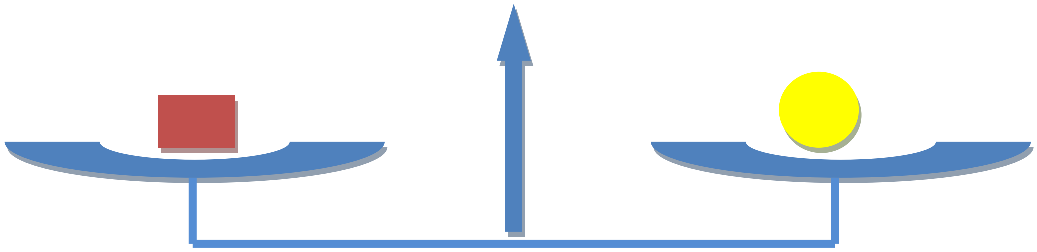
Les égalités ci-dessous sont-elles vraies ? :
(Sans calculatrice qui ne doit servir dans cet exercice que de vérification)

1 + 4 = 7   13 - 5 = 8   2 x 7 = 14   24 : 8 = 4   15 / 3 = 5

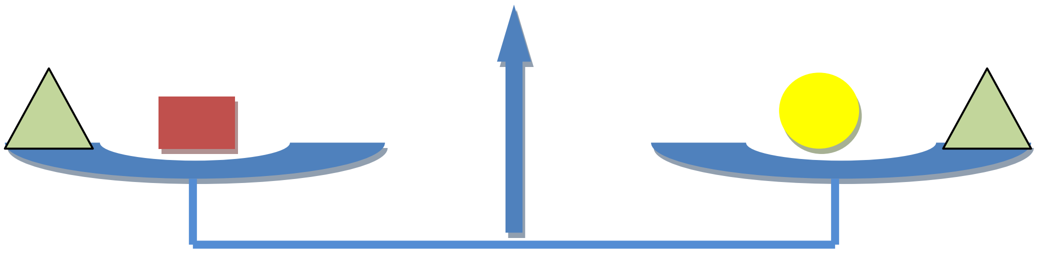
3 – Opérations sur les égalités

Expérimentation déductive

Si nous considérons notre exemple antérieur et la balance équilibrée avec deux quantités de formes différentes mais de même poids, nous avions l'aiguille de la balance verticale signifiant cette « égalité » de poids



Ajoutons sur chacun des plateaux un même objet triangulaire :



Nous savons instinctivement que l'aiguille de la balance restera verticale. Nous en déduisons que nous n'avons pas changé l'équilibre des poids en ajoutant sur chacun des plateaux un même objet.

Théorème : On **ne change pas une égalité** en effectuant une même opération dans chaque membre de l'égalité

Ainsi, si nous avons l'égalité : **2 + 6 = 8**
et que je décide d'ajouter le nombre 7 à chaque membre de l'égalité, je pourrai écrire :

$$(2 + 6) + 7 = 8 + 7$$

De même si je décide de soustraire le nombre 3 à chaque membre de l'égalité, je pourrai écrire :

$$(2 + 6) - 3 = 8 - 3$$

De cette logique, nous pouvons en déduire que si nous avons l'égalité : **2 + 6 = 8** et que nous décidions de déduire le nombre **3** du second membre de l'égalité, pour que celle-ci reste vraie, il faudra faire la même opération dans le premier membre de l'égalité :

$$(2 + 6) = 8$$

$$(2 + 6) \neq 8 - 3$$

Par contre nous aurons bien $(2 + 6) - 3 = 8 - 3$

que nous pouvons aussi écrire $(2 + 6) - 3 = 5$

De la même manière, si nous décidons de multiplier un membre d'une égalité par un nombre quelconque, pour que l'égalité demeure, il est impératif de multiplier également le second membre de l'égalité par ce même nombre :

$$6 = 5 + 1$$

$$2 \times 6 = (5 + 1) \times 2$$

Ce qui donne $12 = (5 + 1) \times 2$

Enfin, si nous décidons de diviser un membre d'une égalité par un nombre quelconque, pour que l'égalité demeure, il est impératif de diviser également le second membre de l'égalité par ce même nombre :

$$18 = 6 \times 3$$

$$18 : 2 = (6 \times 3) : 2$$

Ce qui donne $9 = (6 \times 3) : 2$

Exercices d'application - 2

Remplacez les …. en utilisant les symboles = et ≠ pour indiquer si les écritures ci-dessous sont justes ou fausses :

2 + 9 …. 11
14 : 2 …. (10 + 4) : 3
(6 x 5) : 3 …. 30 : (2 + 1)

4 + 3 …. (3 + 1) + 5
(5 x 4) : 3 …. 9 : 3
(9 – 7) : 2 …. 2 : 1

3 x 7 …. 3 x (5 + 2)
11 – 7 …. (5 + 6) – (4 + 3)
13 + 3 …. (7 + 5) + 3

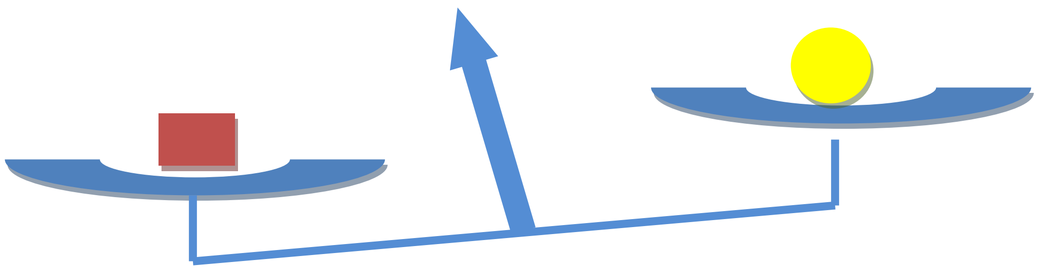
Remplacez les …. par les nombres et les signes corrects qui garantissent que les égalités soient vraies

2 + 6 = 2 + …….
3 x 5 = 3 … ……
(2 x 6) : 4 = ….. : (2 + 2)

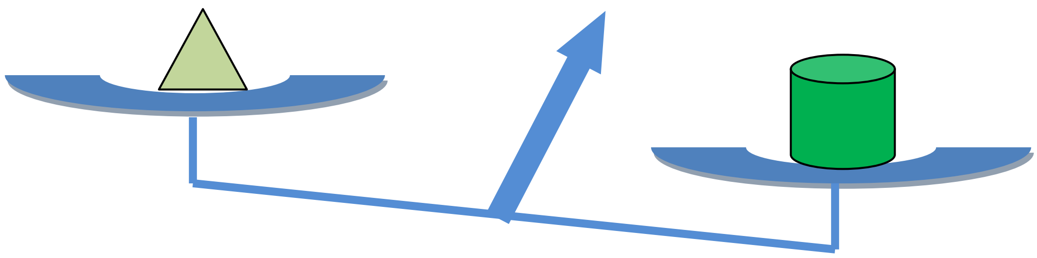
7 + 5 = (4 + 3) + ….
9 – 1 = (8 + 1) … ….

Complexification des calculs dans les égalités

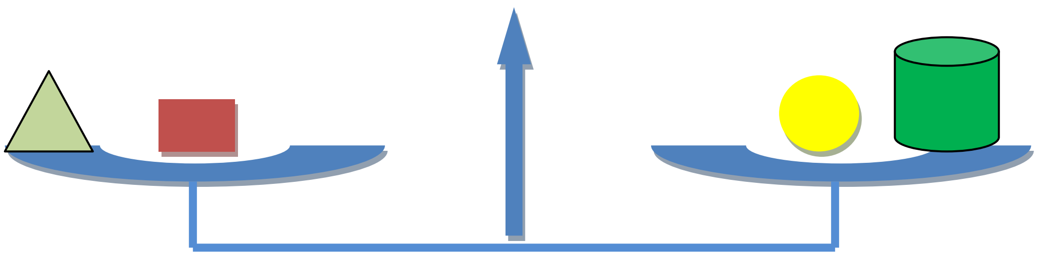
Nous sommes partis d'un exemple où la balance était équilibrée avec deux quantités de formes différentes mais de même poids.
Imaginons maintenant que ces formes soient de poids différents. L'aiguille de la balance penchera du coté du poids le plus lourd :



Imaginons que nous ayons deux autres poids représentés de la manière ci-dessous :



Puis imaginons que nous placions les différents poids sur la même balance et que nous obtenions le résultat ci-dessous :



Nous constatons que l'aiguille de la balance est redevenue verticale. Nous pouvons en déduire que l'équilibre des poids est obtenu tout en ajoutant sur chacun des plateaux des objets différents.

L'application mathématique de cette réalité est que nous pouvons obtenir une égalité vraie tout en utilisant diverses opérations dans chacun des membres de l'égalité.

Ainsi, prenons l'égalité :	**24 = 24**
elle peut s'écrire	24 = 8 x 3
ou encore	(2 + 6) x 3 = 8 x 3
ou encore	(2 + (5 + 1)) x 3 = 8 x 3
ou encore	(2 + (5 + 1)) x 3 = (32 : 4) x 3
ou encore	(2 + (5 + 1)) x 3 = (32 : 4) x (2 +1)

A chaque fois, nous avons changé l'écriture d'un membre de l'égalité sans en changer la valeur

Exercices d'application - 3

Remplacez les …. par les nombres et les signes corrects qui garantissent que les égalités soient vraies

36 = 36
(4 x(….)) = 36
(4 x (7 + …)) = 36
(4 x (7 + …)) = …. x 6
(4 x (7 + …)) = (5 +….) x 6
(4 x (7 + …)) = (5 +….) x (….. + 2)

64 = 64
((….) x 4) = 64
((18 - …) x 4) = 64
((18 - …) x 4) = 8 x ….
((18 - …) x 4) = (5 +….) x ….
((18 - …) x 4) = (5 +….) x (….. + 2)

Essayez de trouvez le « chemin » de diverses écritures pour arriver aux égalités suivantes :

25 = 25
….
….
….
(…+ 1) x (1x …) = (…+12)

44 = 44
….
….
….
(…+ 8) x (1+ …) = (…+ 21) + (2 x 5)

Ecrivez les nombres ci-dessous sous une forme développée où n'apparaissent que les chiffres de 0 à 9

33 =
108 =
68 =

Remplacez les …. par les nombres et les signes corrects qui garantissent que les égalités soient vraies

…. – 4 = 3 x 6	14 : 2 = 3 … ….
15 … …. = 2 + 1	24 : …. = 5 + ….
(3 + 7) = 14 … ….	(3 x 13) + 6 = (4 x 12) … ….

Corrigé des Exercices d'application

Exercices d'application - 1

Les égalités ci-dessous sont-elles vraies ? :
(Sans calculatrice qui ne doit servir dans cet exercice que de vérification)

1 + 4 = 7	13 - 5 = 8	2 x 7 = 14	24 : 8 = 4	15 / 3 = 5
Fausse	**Vraie**	**Vraie**	**Fausse**	**Vraie**

Exercices d'application - 2

Remplacez les …. en utilisant les symboles = et ≠ pour indiquer si les écritures ci-dessous sont justes ou fausses :

2 + 9 **=** 11	4 + 3 **≠** (3 + 1) + 5	3 x 7 **=** 3 x (5 + 2)
14 : 2 **≠** (10 + 4) : 3	(5 x 4) : 3 **≠** 9 : 3	11 – 7 **=** (5 + 6) – (4 + 3)
(6 x 5) : 3 **=** 30 : (2 + 1)	(9 – 7) : 2 **=** 2 : 1	13 + 3 **≠** (7 + 5) + 3

Remplacez les …. par les nombres et les signes corrects qui garantissent que les égalités soient vraies

2 + 6 = 2 + **(2 x 3)** ou 2 + 6 = 2 + **(4 + 2)** ou 2 + 6 = 2 + **(18 : 3)**
7 + 5 = (4 + 3) + **(3 + 2)**
3 x 5 = 3 **x (4 + 1)**
9 – 1 = (8 + 1) **- 1**
(2 x 6) : 4 = **12** : (2 + 2) ou (2 x 6) : 4 = **(2 x (5 + 1))** : (2 + 2)

Exercices d'application - 3

Remplacez les …. par les nombres et les signes corrects qui garantissent que les égalités soient vraies

36 = 36
(4 x (**9**)) = 36
(4 x (7 + **2**)) = 36
(4 x (7 + **2**)) = **6** x 6
(4 x (7 + **2**)) = (5 + **1**) x 6
(4 x (7 + **2**)) = (5 + **1**) x (**4** + 2)

64 = 64
((**16**) x 4) = 64
((18 - **2**) x 4) = 64
((18 - **2**) x 4) = 8 x **8**
((18 - **2**) x 4) = (5 + **3**.) x **8**
((18 - **2**) x 4) = (5 + **3**.) x (**6** + 2)

Essayez de trouvez le « chemin » de diverses écritures pour arriver aux égalités suivantes :

25 = 25
(4 + 1) x **5 = 25**
(4 + 1) x (1 x **5) = 25**
(4 + 1) x (1 x **5) =** (**13** +12)

44 = 44
11 x **4** = 44
(**3** + 8) x **4** = 44
(**3** + 8) x (1 + **3**) = 44
(**3** + 8) x (1 + **3**) = **34** + (2 x 5)
(**3** + 8) x (1 + **3**) = (**13** + 21) + (2 x 5)

Ecrivez les nombres ci-dessous sous une forme développée où n'apparaissent que les chiffres de 0 à 9

33 = **3 x 11** = **3 x (7 + 4)**
108 = **2 x 54** = **2 x (6 x 9)**
68 = **2 x 34** = **2 x (2 x 17)** **=** **2 x (2 x (9 + 8))**

Remplacez les …. par les nombres et les signes corrects qui garantissent que les égalités soient vraies

22 – 4 = 3 x 6 14 : 2 = 3 **+ 4**
15 **: 5** = 2 + 1 24 : **4** = 5 + **1** ou 24 : **3** = 5 + **3**
(3 + 7) = 14 **- 4**. (3 x 13) + 6 = (4 x 12) **- 3**.